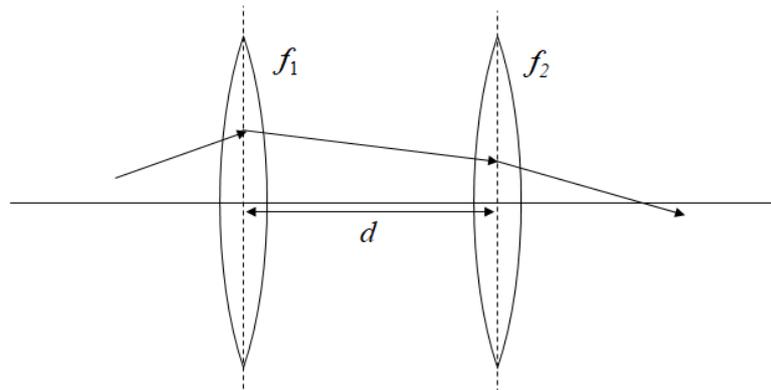


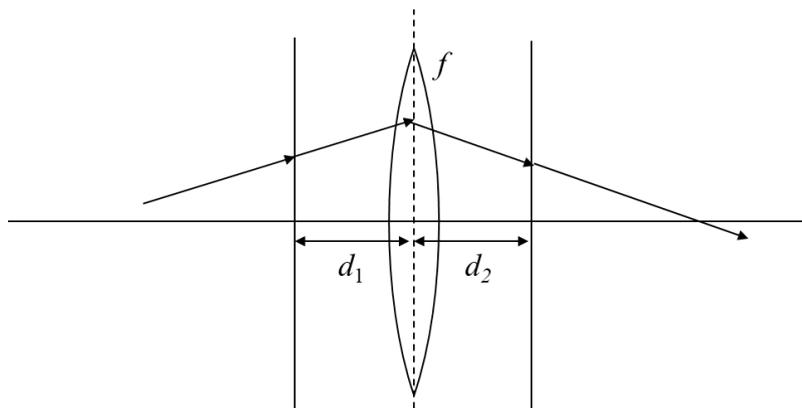
複合レンズの公式

カメラにクローズアップを取り付けたときに合成焦点距離はどうなるかという問題を考えてみた。カメラレンズを一枚の単レンズとして考え、ここに凸レンズのクローズアップレンズを取り付けたときの光学系は以下のようなになる。

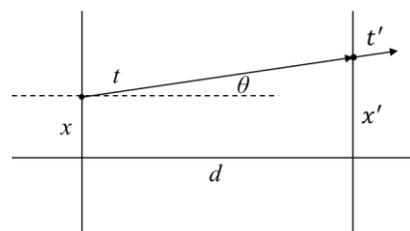


ここで、カメラレンズの焦点距離を f_1 、クローズアップレンズの焦点距離を f_2 として、レンズ間の距離を d とする。

この合成焦点距離を求めるときには、2枚の複合レンズを1枚の単レンズに置き換えるのであるが、レンズが d だけ離れているので、その効果も考慮する必要がある。それで、上の光学系と等価な光学系として以下のような光学系を考える。



このような問題を解くときには光線行列を用いると簡単になる。光線行列はレンズが十分に薄い（薄肉レンズ）のときに幾何光学的に考えている方法である。具体的には、光線が通過する点の中心軸からの距離とその傾き $t \equiv \tan \theta$ を要素とするベクトルを考える。すると、例えば、 d

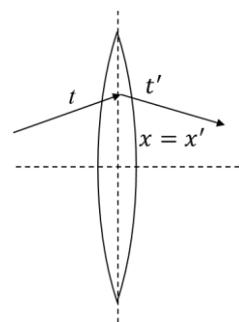


だけ並進することを示す変換行列を用いると、次のように変換される。

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (1)$$

同様にレンズの作用は薄肉レンズを考えると、方向だけを変化させることになるため、焦点距離 f の場合は次のように表すことができる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (2)$$



この光線行列を用いると、焦点距離 f_1 と f_2 のレンズが d だけ離れている複合レンズは

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$$

となるので、行列の計算をすると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ \frac{d}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。この複合レンズと等価な単レンズを上図のように定めると、この場合は次のように表される。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_1}{f} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_2}{f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (4) \end{aligned}$$

(3)式と(4)式を比較して、 f 、 d_1 、 d_2 を

$$\frac{d}{f_1} = \frac{d_1}{f}$$

$$\frac{d}{f_2} = \frac{d_2}{f}$$

$$-\frac{1}{f} = \frac{d}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}$$

と置くと、

$$d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} = d$$

となり、両者は完全に一致する。従って、

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

という公式を導くことができる。