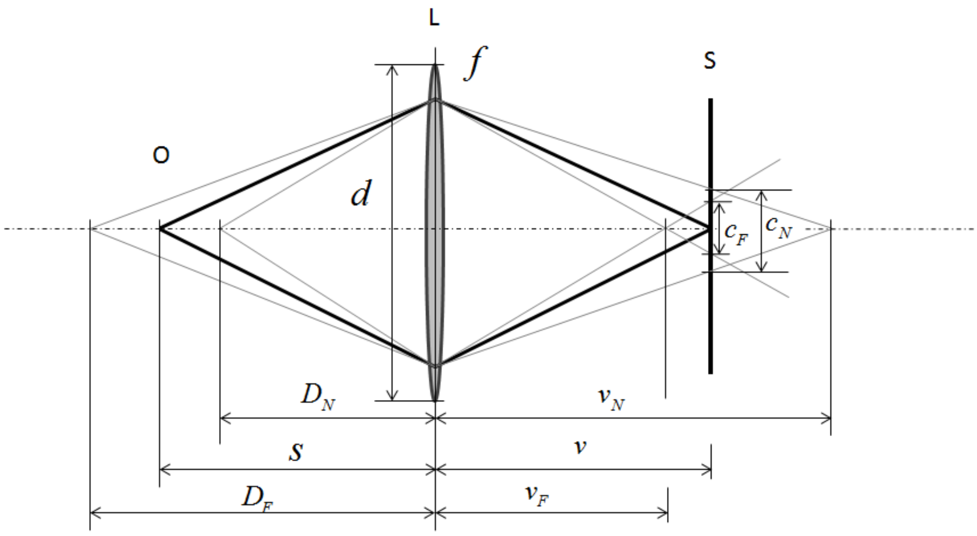
被写界深度と許容錯乱円

昆虫や花の接写撮影をするときに、ある場所にピントを合わせると別の場所のピントが合わなくてなって困ることがあります。こんなときには絞りを絞るとよいという話は聞きますが、どの程度ピントが合うようになるのかは経験的にしか知りませんでした。ピントが合う距離の範囲のことを被写界深度（depth of field: DOF）と呼びます。また、像が少しくらいボケていても人の目にはボケているとは感じない範囲を、カメラの撮像素子上の円で表して許容錯乱円（circle of confusion: CoC）と呼んでいるそうです。

これらの量はいずれも幾何光学で求めることができます。実際には、光の回折効果により点光源から出た光もレンズで絞ると広がってしまいますが、許容錯乱円はそれよりも十分大きくて、回折効果は考えなくてもよいという仮定で計算されています。



まず、上図のような光学系を考えてみましょう。点 O にある点光源から出た光を焦点距離 f のレンズ L でスクリーン S 上に集光させることを考えます。もちろん、ここでいうスクリーンはカメラの撮像素子のことです。今、点光源とレンズの距離を s としたときに、点光源から出た光がちょうどスクリーン S 上に集光されるとしましょう。このとき、点 O より少し遠い、距離 D_F のところに置いた点光源から出た光は少し手前で集光されます。従って、スクリーン上で像はボケてしまいます。そのボケの大きさを c_F としておきます。同様に、点 O より少し近い、距離 D_N のところに置いた点光源から出た光は、スクリーンより少し後ろ側で集光され、スクリーン上ではやはり像はボケます。その大きさを c_N とします。

このとき、次のレンズの公式

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f} \tag{1}$$

が成り立ちます。ここで、v はレンズとスクリーンとの距離です。同様に、

$$\frac{1}{D_F}+\frac{1}{v_F}=\frac{1}{f} \tag{2}$$

$$\frac{1}{D_N}+\frac{1}{v_N}=\frac{1}{f} \tag{3}$$

などの式も成り立ちます。また、像のボケを表す c_N や c_F は、レンズの口径 d を用いて、

$$\frac{v_N-v}{v_N}=\frac{c_N}{d} \tag{4}$$

$$\frac{v-v_F}{v_F}=\frac{c_F}{d} \tag{5}$$

のように表すことができます。

式(4)と(5)から、式(1)-(3)を用いて、v、v_N、v_F を消去しますと、

$$D_N=\frac{sf^2}{f^2+Nc_N(s-f)} \tag{6}$$

$$D_F=\frac{sf^2}{f^2-Nc_F(s-f)} \tag{7}$$

という関係が得られます。ここで、レンズの F 値を$N=f/d$とおきました。これらの式からボケぐあいを表す c_N や c_F を求めてみますと、

$$c_N=\frac{(s-D_N)f^2}{D_N N(s-f)} \tag{8}$$

$$c_F=\frac{(D_F-s)f^2}{D_F N(s-f)} \tag{9}$$

となります。この２つの式はまとめると

$$c_i=\frac{|s-D_i|f^2}{D_i N(s-f)} \tag{8'}$$

となります。ここで、$i=N,F$を表します。

今、人の目ではボケているとは判断できないぎりぎりの大きさのボケを考えます。スクリーン（撮像素子）上で、そのボケの大きさを表す円（許容錯乱円）を考えて、その直径を c とおきます。このとき、スクリーン上での像の大きさが c より小さくなるような、光源の位置の範囲を被写界深度と呼びます。式(6)と(7)で$c_F=c_N\equiv c$とおいて、被写界深度 DOF を表すと

$$\mathrm{DOF}\equiv D_F-D_N \tag{10}$$

$$= \frac{sf^2}{f^2 - Nc(s-f)} - \frac{sf^2}{f^2 + Nc(s-f)}$$

$$= \frac{2sf^2 Nc(s-f)}{f^4 - \{Nc(s-f)\}^2}$$

になります。この式はやや複雑ですが、レンズの倍率を用いると簡単に表すことができます。レンズの倍率 m は

$$m \equiv \frac{v}{s} = \frac{f}{s-f} \tag{11}$$

または、

$$s = \frac{m+1}{m} f \tag{12}$$

で表されます。式(11)と(12)を式(10)に代入しますと、

$$\mathrm{DOF} = \frac{2f\,(m+1)/m}{fm/(Nc) - Nc/(fm)} \tag{13}$$

になります。すなわち、焦点距離 f、F 値 N、それに、倍率 m を与えれば、c を適当に仮定することにより、被写界深度 DOF が求まることになります。

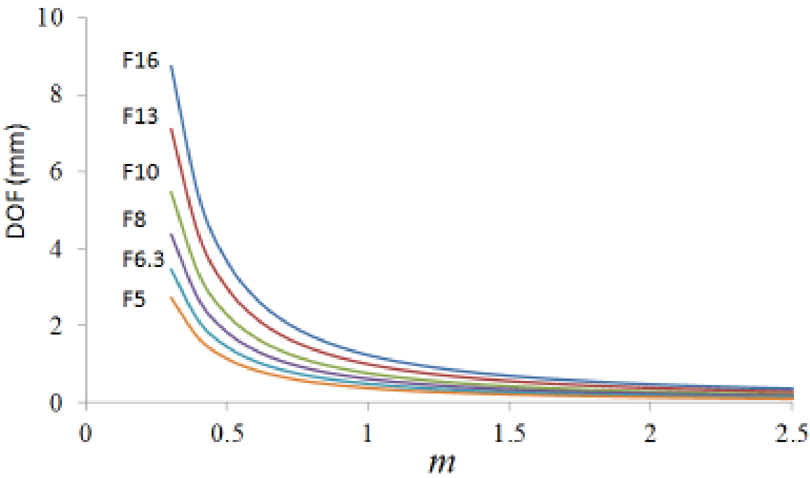
許容錯乱円の値 c の決め方にはいろいろな方式があります。例えば、Zeiss の式では、撮像素子の対角線の長さの 1/1730 となるように決めています。これは、35mm フィルムで許容錯乱円の半径を 0.025mm とすることから逆算した値です。また、撮像素子の対角線の長さの 1/1500 とする方式もあります。これは、写真を対角線の長さ 30 cm まで引き伸ばしたときに分解能 5 line/mm まで人が見ることができるとして決めたものです。

例えば、後者の定義で、実際に Nikon D90 について許容錯乱円の値 c を求めてみましょう。D90 の撮像素子の大きさは 23.6 x 15.6 mm^2 なので、その対角線の長さは 28.3 mm となります。従って、c の値は 0.0189 mm ということになります。記録画素数は 4288 x 2848 ピクセルなので、1 ピクセル当たりの大きさは 0.00550 mm となり、c は 3.4 ピクセルに当たります。

接写条件では、式(13)はもう少し簡単な関係式にすることができます。接写条件では $m \approx 1$ なので、式(13)の分母の第 1 項は第 2 項より十分大きくなり、第 2 項を無視することができます。その場合には、

$$\mathrm{DOF} = \frac{2Nc(m+1)}{m^2} \tag{14}$$

となり、被写界深度は焦点距離にはよらず、倍率と F 値のみで決定されます。



上図は c を 0.0189 mm としていろいろな F 値で式(14)を計算したものです。絞りを絞って F 値を大きくすればするほど、それに比例して被写界深度 DOF は大きくなり、また、倍率 m が大きくなればなるほど、被写界深度は小さくなっていくことが分かります。いずれにしても、等倍（m=1）では DOF は 1 mm 程度と大変狭くなってしまいます。許容錯乱円は写真を対角 30 cm ほどに引き伸ばしたときの条件ですから、L 版で見るだけならば、対角線の距離は半分程度になりますので、被写界深度も倍になる勘定です。

ついでに、接写の条件で、式(8')は

$$\frac{c_i}{|s-D_i|} = \frac{m^2}{m+1} \cdot \frac{1}{N} \tag{8''}$$

と近似できます。ここで、$D_i \approx s$とおき、式(11)と(12)を用いました。この式は、接写条件で、合焦位置から撮影対象がずれた場合、ある F 値で像がどれだけボケるかを示す式として有用です。この式から、合焦の位置からずれた場合、像のボケは倍率の関数と F 値の逆数の積で決まることが分かります。

一方、D_Fを無限になるような条件にすると、D_Nより遠方のものであれば、どの距離にあるものでもピントが合わせることができるようになります。この条件は、式(7)の分母を 0 にすれば求めることができます。すなわち、

$$f^2 - Nc(H-f) = 0$$

です。ただし、この条件でピントの合う位置 s を$s \equiv H$としています。これを H について解くと、

$$H = \frac{f^2}{Nc} + f \tag{15}$$

となります。すなわち、H、あるいは、その時の倍率m_hを$m_h = f/(H-f)$となるようにカ

メラを設定しておきさえすれば、焦点を合わせなくてもピントの合う写真が撮れるようになるのです。

【参考文献】

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Depth_of_field
2. http://en.wikipedia.org/wiki/Circle_of_confusion
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Zeiss_formula